MA1 – přednáška 7.12.2020

Diferenciální rovnice – úvod

„Co je" diferenciální rovnice:

1) rovnice pro neznámou funkci – nové(!);
2) rovnice, která vyjadřuje vztah mezi funkcí (kterou je vyjádřena „zkoumaná" veličina a rychlostí její změny, případně zrychlením.

Pokud označíme hledanou funkci $y = y(x)$, pak diferenciální rovnicí je dán vztah mezi hodnotami funkce $y(x)$ (tj. hodnotami veličiny) a derivací $y'(x)$ (tj. rychlostí změny této veličiny), případně $y''(x)$ (a někdy i derivacemi vyšších řádů).
Diferenciální rovnice pro funkci jedné proměnné $y(x)$, kde je „jen" první derivace $y'(x)$ hledané funkce jsou 1. řr.

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu:

obecně tvaru: $F(x, y(x), y'(x)) = 0$, $x \in (a, b)$,

a speciálně $y'(x) = F(x, y(x))$, $x \in (a, b)$

(kde funkce F je funkce tří proměnných, tj. $F(x, y, z)$, resp. proměnných dvou, tj. $F(x, y)$)

Příklady diferenciálních rovnic 1. řádu (obyčejných) – „známých"

1) 2. Newtonův pohybový zákon – v případě konstantní síly F:

$\frac{d}{dt}(m v(t)) = F$, je-li m konstantní, pak $m \cdot \frac{dv}{dt} = F$
(m – hmotnost, $v(t) = v$ – rychlost pohybujícího se hmotného bodu),
$t \in \langle 0, T \rangle$; známe-li, že $v(0) = v_0$ (t.zv. počáteční podmínku),
pak řešení rovnice je $v(t) = \frac{F}{m} t + v_0$, $t \in \langle 0, T \rangle$.

2) Rovnice radioaktivního rozpadu (už byla zmíněna v úvodu k integrálnímu počtu)

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\alpha\, y(t) \qquad y(0) = y_0 \qquad (t \in \langle 0, T \rangle)$$

($y(t)$ je množství radioaktivní látky v čase t, $\alpha > 0$ je konstanta, charakteristická pro danou látku)

3) Podobně růst populace (za ideálních podmínek):

$$\frac{dm(t)}{dt} = k\, m(t) \,, \quad k > 0, \; t \geq t_0, \quad m(t_0) = m_0 \text{ (počáteční podmínka)}$$

4) V chemii:

a) monomolekulární reakce:

$$\frac{dx(t)}{dt} = k\,(a - x(t)) \,, \quad x(0) = 0 \,,$$ kde

$x = x(t)$ je koncentrace látky vznikající, $a > 0$ je koncentrace původní látky v čase $t = 0$, $k > 0$ konstanta.

b) bimolekulární reakce:

$$\frac{dx(t)}{dt} = k\,(a - x(t)) \cdot (b - x(t)) \,, \quad x(0) = 0$$

$x = x(t)$ koncentrace vznikající látky v čase t, $a > 0$ – počáteční koncentrace látky A, $b > 0$ – počáteční koncentrace látky B, $k > 0$ – rychlostní konstanta.

5) Vytékání vody z nádoby (válcové s kruhovým otvorem ve dně)

$h(t)$ značí výšku hladiny vody v čase t, $h(0) = H$

R - poloměr válcové nádoby, r - poloměr kruhového otvoru,

g - gravitační zrychlení

$$\frac{dh(t)}{dt} = -\left(\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2g}\right)\sqrt{h(t)}, \quad h(0) = H, \quad t \geqq 0$$
$$(h(t) \geqq 0)$$

6) Newtonův ochlazovací zákon

$T(t)$ - teplota, T_0 - počáteční teplota tělesa,

T_v - teplota okolního prostředí (vzduchu, lázně apod.)

$T_v < T_0$:

$$\begin{cases} \frac{dT(t)}{dt} = -k\,(T(t) - T_v), & k > 0 \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

7) Usazování částice hmotnosti m v emulzi

(2. Newtonův pohybový zákon)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\,(m \cdot v(t)) = mg - k\,v(t), & k > 0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

(odpor prostředí je přímo úměrný rychlosti pohybu částice (při malých rychlostech))

8) Ředění roztoku :

v čase $t = 0$ je ve V litrech roztoku x_0 - rozpuštěné látky; ředí se - přitéká destilovaná voda rychlostí v l/sec $= v_p$, odtéká roztok stejnou rychlostí; je-li $x(t)$ množství rozpuštěné látky, v čase $t > 0$, je rovnice „ředění“ :

$$\frac{d\,x(t)}{dt} = -\frac{v_p}{V}\,x(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geqq 0$$

Jak se diferenciální rovnice řeší? Obecně je to složitý problém, pokusme se najít cestu k řešení u „lehkých" diferenciálních rovnic – „podobně" asi integrování.

Je-li dána diferenciální rovnice $F(x, y(x), y'(x)) = 0$, pak řešením je taková funkce $y = y(x)$, která je def. na nějakém intervalu (a, b), má zde derivaci $y'(x)$ a pro pro všechna $x \in (a, b)$ platí $F(x, y(x), y'(x)) = 0$.

<u>Pokusme se najít řešení diferenciální rovnice</u> (2. příklad)

(1) $\quad y'(t) = -\alpha y(t) \quad , t \in R$

1) vidíme, že $y(t) \equiv 0$, $t \in R$ je řešení (konstantní, nebo se nazývá též stacionární)

2) z „tabulky derivací" najdeme, že též $y(t) = e^{-\alpha t}$, $t \in R$ je řešením rovnice (1)

3) jsou ještě další řešení?
„jako u integrování" – $y(t) = e^{-\alpha t} + c$, $c \in R$?
<u>ne</u>: $\left(e^{-\alpha t} + c\right)' = -\alpha e^{-\alpha t} \neq -\alpha\left(e^{-\alpha t} + c\right)$
ale $\quad y(t) = c\, e^{-\alpha t}$, $c \in R$ už jsou řešení:
$$y'(t) = \left(c e^{-\alpha t}\right)' = c(-\alpha) e^{-\alpha t} = -\alpha y(t), \ t \in R$$

4) ale nejsou ještě další řešení, která jsme „nechodili"? (v 3) a 1)?)
Tedy hledáme odpověď na otázku: je-li $y(t)$ řešení rovnice (1) v R ($t \in R$), existuje $c \in R$ tak, že $y(x) = c\, e^{-\alpha t}$, $t \in R$?
($c = 0$ by odpovídalo stacionárnímu řešení).

Nechť $y(t)$ je tedy řešení rovnice $y'(t) = -\alpha y(t)$, $t \in R$: naivně „integrováním“, pak dostaneme, že pro $t \in R$ je

$$y(t) + c = -\alpha \int y(t)\,dt \;.$$

Toto je t. zv. integrální rovnice, odkud se dokáží věty o existenci řešení v „teorii“ diferenciálních rovnic, ale řešení asi takto „nespočítáme“. Zkusme jinak:

Je-li $\qquad y'(t) = -\alpha y(t) \quad , t \in R,$

pak a) je-li $y'(t) \neq 0$, $t \in R$, můžeme rovnici upravit:

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\alpha$$

a pak snadno (užitím 1VS) integrovat (v R)

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)}\,dt = \int -\alpha\,dt \quad , t \in R \quad ,$$

a tedy $\qquad \ln|y(t)| = -\alpha t + c, \quad t \in R$

a pak $\qquad |y(t)| = e^{-\alpha t + c} \quad (= e^c \cdot e^{\alpha t})$

a odstranění absolutní hodnoty:
protože funkce $y(t)$ je funkce spojitá v R (má vlastní $y'(t)$ v R) a je $y(t) \neq 0$ v R, je (vlastnost spojité funkce – nabývání „mezihodnot“) buď $y(t) > 0$ (nebo $y(t) < 0$) v R;
je-li $y(t) > 0$, $t \in R$, pak $y(t) = e^c \cdot e^{-\alpha t}$, $t \in R$;
$y(t) < 0$, $t \in R$, pak $y(t) = -e^c e^{-\alpha t}$, $t \in R$.

Tedy, „dohromady“: $\underline{y(t) = K e^{-\alpha t}, \; K \neq 0, \; t \in R}$!
(v případě a)) (což jsme chtěli ukázat)

ale b) nemůže mít rovnice (1) řešení takové, že bude nabýval v R hodnoty nenulové i nulové ?

Lze ukázat, že naše diferenciální rovnice (1) taková řešení nemá – aspoň naznačme: pokud $y(x) \neq 0$ v $(a,b) \subset R$, je (dle našeho výpočtu v a)) $y(x) = K e^{-\alpha t}$, $t \in (a,b)$, kdyby pak např. $y(b)=0$, pak díky spojitosti řešení by $\lim_{x \to b-} y(x) = 0$, ale $\lim_{t \to b-} K e^{-\alpha t} = K e^{-\alpha b} \neq 0$ $(K \neq 0)$. Jen $\lim_{t \to +\infty} K e^{-\alpha t} = 0$!

Tedy máme výsledek (přidáme-li k a) ještě stacionární řešení): všechna řešení rovnice $y'(t) = -\alpha y(t)$, $\alpha > 0$, jsou tvaru

$$y(t) = K e^{-\alpha t}, \ t \in R, \ K \in R \quad \dots\dots (2).$$

Toto řešení se nazývá „obecné řešení" dané diferenciální rovnice.

Obvykle je třeba řešit t.zv. počáteční úlohu pro danou diferenciální rovnici (nazývá se též Cauchyho úloha): je zadána t.zv. počáteční podmínka : $y(t_0) = y_0$ (zde $t_0 \in R$, $y_0 \in R$) (tj. hledá se řešení, které splňuje tuto „počáteční" podmínku, často v aplikacích $t_0 = 0$, tj. je zadáno $y(0) = y_0$ – odtud „počáteční")

Takové řešení najdeme zde snadno (dosazením $t = t_0$, $y(t_0) = y_0$ do (2)):

$$y_0 = K e^{-\alpha t_0} \Rightarrow K = y_0 e^{\alpha t_0}$$ a příslušné „počáteční" řešení je

$$y_{poč}(t) = y_0 e^{-\alpha (t - t_0)}, \ t \in R$$

Tedy (důležité) – ke každé počáteční podmínce existuje právě jedno řešení dané Cauchyho úlohy.

A zkusme „vyřešit" ještě jiné „podobné" diferenciální rovnice, dříve, než postup při řešení rovnice radioaktivního rozpadu zobecníme:

Příklad 2: $\underline{y'(x) = -2x\,y(x)\,,\ y(x_0) = y_0}$ $(x_0 \in R, y_0 \in R)$

(zpravidla se píše $y' = -2xy$)

(i) rovnici řeší (opět) konstantní řešení $y(x) \equiv 0\,, x \in R$;

(ii) nechť $y(x) \neq 0$ v R, pak lze opět rovnici upravit na

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -2x\,, \quad x \in R$$

a integrací (opět 1VS) dostaneme

$$\ln|y(x)| = -x^2 + c\,, \quad c \in R,\ x \in R \quad \text{a tedy}$$

$$|y(x)| = e^{-x^2} \cdot e^c\,,$$

a analogicky jako v minulém příkladu je zde

$$\underline{y(x) = K e^{-x^2},\ K \neq 0,\ x \in R}$$

(iii) a opět, jako v minulém příkladu, rovnice nemá řešení, které by nabývalo zároveň nulových i nenulových;

Tedy obecné řešení dané rovnice ((i) a (ii)) je

$$\underline{y(x) = K e^{-x^2},\ K \in R\,,\ x \in R}\,,$$

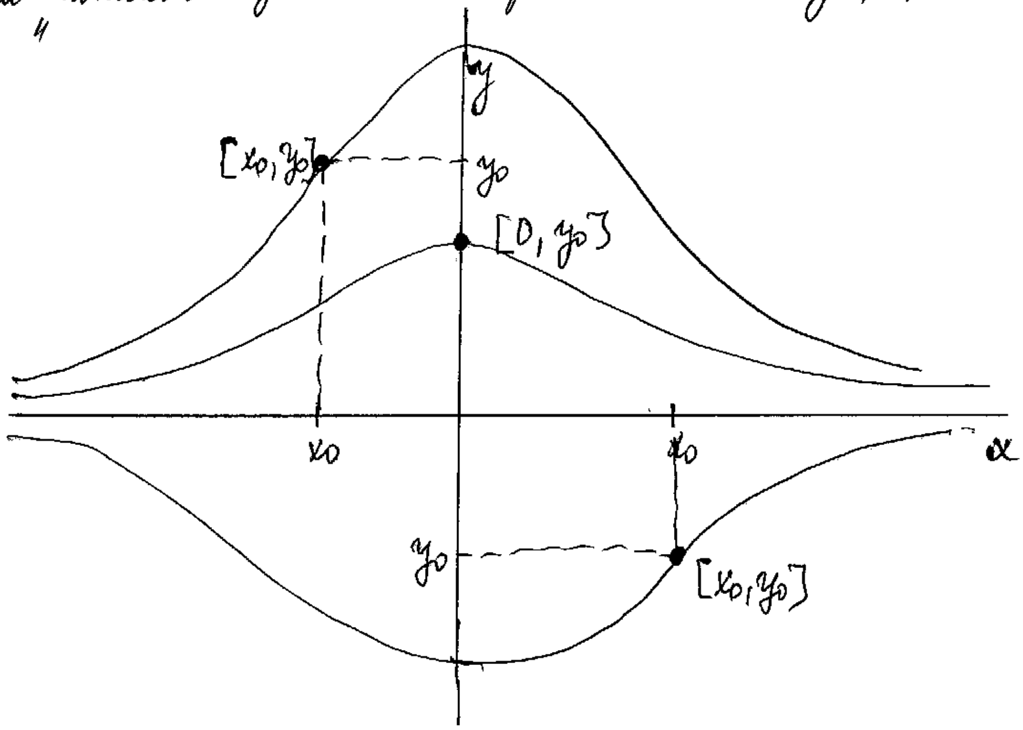
a je-li zadána počáteční podmínka $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in R, y_0 \in R$ (lib.), pak opět počáteční úloha (také) má jediné řešení

$$\underline{y_{poč}(x) = y_0\, e^{-(x^2 - x_0^2)}\,,\ x \in R}\,,$$

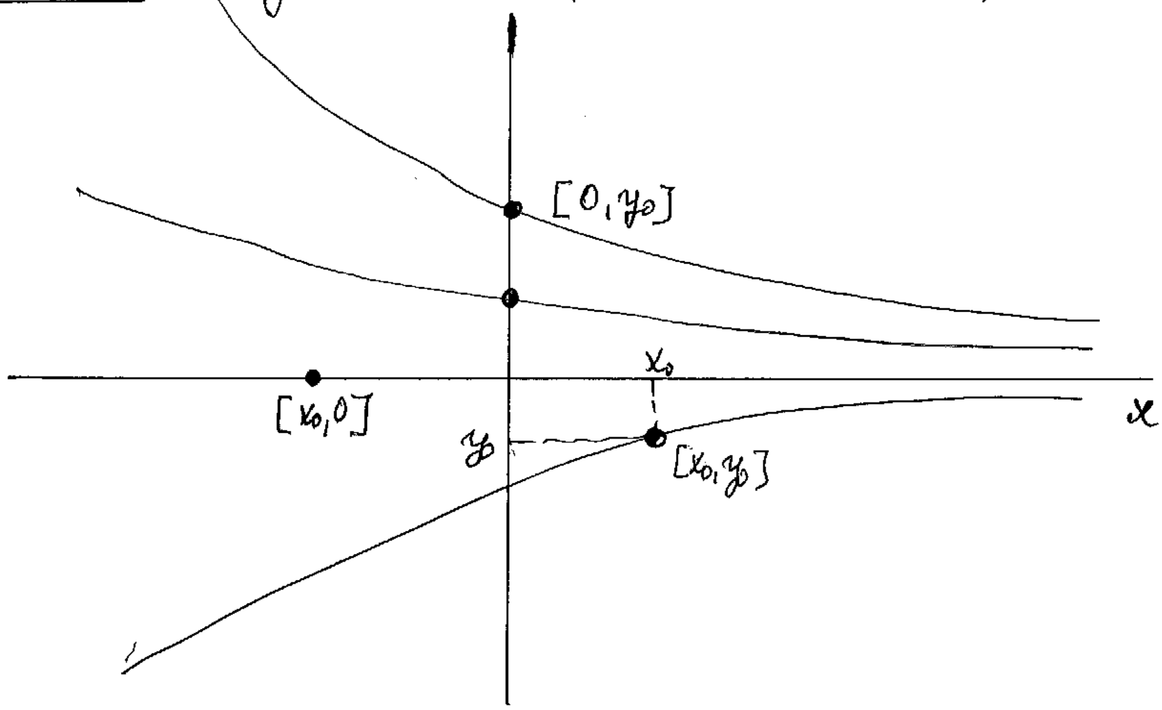
neboť, má-li platit $y_0 = y(x_0)$, tj. $y_0 = K e^{-x_0^2}$, je (odtud) $\underline{K = y_0 \cdot e^{x_0^2}}$

Zkusme si představit „graficky" řešení diferenciální rovnice: graf řešení $y(x)$ dané diferenciální rovnice se nazývá integrální křivka, a počáteční podmínka $y(x_0)=y_0$ udává pak bod $[x_0,y_0]$, kterým integrální křivka, která „znázorňuje" řešení počáteční úlohy, prochází:

Zde:



Příklad 1 $\quad y(x) = K e^{-\alpha t}$, $t \in R$, $K \in R$ $(\alpha > 0)$ (obecné řešení)



Příklad 3. $\quad y' = -\dfrac{x}{y}$, kde $y(x) \neq 0$

(i) rovnice nemá stacionární řešení!

(ii) zkusme rovnici „integrovat" opět pomocí 1VS:

$$y'(x) \cdot y(x) = -x \,,$$

„lépe" $\quad 2y(x) \cdot y'(x) = -2x$

a integrací: $\quad \int 2y(x)\, y'(x)\, dx = \int -2x\, dx$,

dostaneme $\quad y^2(x) = -x^2 + c$, tj.

$$x^2 + y^2(x) = c \quad ! \quad (*)$$

Tedy, zde má jen $c > 0$, a pak (chceme řešení $y(x)$)

$$y^2(x) = c - x^2$$

tj. odtud pro dané $c > 0$ řešení bude definováno v intervalu $(-\sqrt{c}, \sqrt{c})$ (neboť i $c - x^2 > 0$) a buď $y(x) = \sqrt{c - x^2}$, nebo $y(x) = -\sqrt{c - x^2}$, $x \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c})$

Je-li dána počáteční podmínka $y(x_0) = y_0 \ (\neq 0)$, pak $c = x_0^2 + y_0^2$ $(*)$

a řešení je

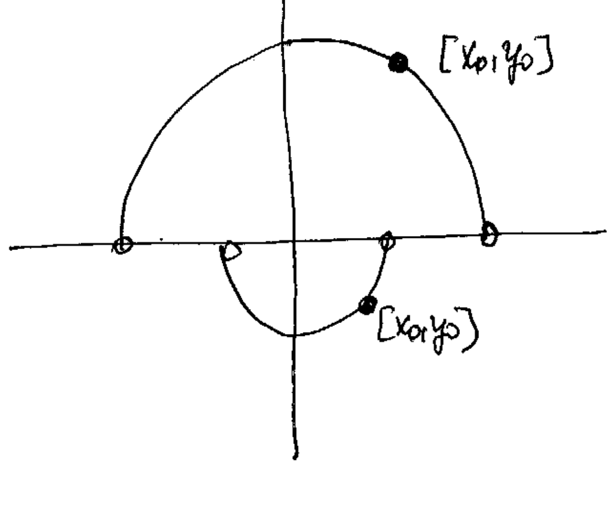
$y(x) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - x}$

$(y_0 > 0)$

$y(x) = -\sqrt{x_0^2 + y_0^2 - x}$

$(y_0 < 0)$

$x \in \left(-\sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\right)$



Příklad 4 (rovnice „vytékání" vody z válcové nádoby):

$$h'(t) = -k\sqrt{h(t)}\,, \quad k>0 \qquad (h(0)=H\geq 0)\,,\ t\geq 0$$

(i) stacionární řešení: $h(t)\equiv 0$, $t\in R$

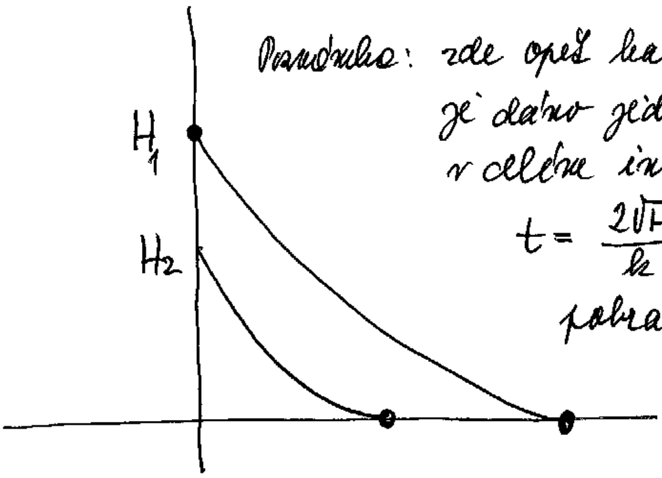
(ii) jinak $h(t)>0$ („kvůli" $\sqrt{h(t)}$); pak opět stejná úvaha – (užití 1VS) – jako v příkladech předchozích:

$$\int \frac{h'(t)}{2\sqrt{h(t)}}\,dt = -\int \frac{k}{2}\,dt$$

a
$$\sqrt{h(t)} = -\frac{k}{2}\cdot t + C$$
$$h(t) = \left(C - \frac{k}{2}t\right)^2 > 0, \text{ tj.}$$

„řešení" je pro $t\in\left\langle 0, \frac{2C}{k}\right\rangle$, $C>0$.

Pro počáteční podmínku $h(0)=H$ dostáváme: $C=\sqrt{H}$, a tedy
$$h_{poč}(t) = \left(\sqrt{H}-\frac{k}{2}t\right)^2, \quad t\in\left\langle 0,\frac{2\sqrt{H}}{k}\right\rangle$$



Poznámka: zde opět každou počáteční podmínkou $H>0$ je dáno jediné řešení, ale lze řešení uvažovat v celém intervalu $t\in\langle 0,+\infty)$ – v bodě $t=\frac{2\sqrt{H}}{k}$ je řešení $y\left(\frac{2\sqrt{H}}{k}\right)=0$ a dále pokračuje už nulou (tj. „slepí" se se stacionárním řešením)

A zkusme obecně: mějme diferenciální rovnici

(*) $\underline{y' = f(x)\cdot g(y), \quad x \in (a,b), \, y \in (c,d)}$

(1. řo. diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými)

Pak platí

Věta: Je-li $f(x)$ funkce spojitá v (a,b), $g(y)$ je funkce spojitá v (c,d) a $g(y) \neq 0$ v (c,d), pak pro každou počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$ existuje právě jedno řešení rovnice $y' = f(x).g(y)$, $x \in (\alpha,\beta) \subset (a,b)$.

Důkaz (a zároveň návod, jak řešení „najít"):

je-li $y(x)$ řešení rovnice (*) v intervalu $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$, pak je

$$y'(x) = f(x).\,g(y(x)), \quad x \in (\alpha,\beta), \quad g(y(x)) \neq 0 \text{ v } (\alpha,\beta),$$

a tedy lze „separovat" a integrovat (1VS) v (α,β):

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx = \int f(x)\,dx ,$$

a označme-li $F(x) = \int f(x)dx$, $x \in (a,b)$ a $G(y) = \int \frac{1}{g(y)}dy$ v (c,d), (integrály existují díky spojitosti $f(x)$ na (a,b) a $\frac{1}{g(y)}$ na (c,d)), dostaneme $\underline{G(y(x)) = F(x) + C}$, $x \in (\alpha,\beta)$;

a protože $G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$ v (c,d), a $G(y)$ je spojitá v (c,d), je $G(y)$ ryze monotónní funkce v (c,d) a tedy existuje ke G funkce inverzní G^{-1}, dostáváme:

(**) $\underline{y(x) = G^{-1}(F(x) + C)}$, $x \in (\alpha,\beta) \subset (a,b)$

(řešení $y(x)$ nemusí být definováno v „celém" intervalu (a,b), může interval $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$ „záviset na konstantě" C – viz příklad)

Obráceně se snadno ukáže, že fce $y(x)$ (v (**)) řeší danou rovnici.

Řešení počáteční úlohy $y(x_0) = y_0$ ($x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$))

$$G(y_0) = F(x_0) + C \Rightarrow C = G(y_0) - F(x_0)$$

(tj. existuje jediné řešení počáteční úlohy).

Poznámka:

V aplikacích se často píše diferenciální rovnice s $y'(x) = \frac{dy}{dx}(x)$;

pak rovnice má tvar $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$, $g(y) \neq 0$

a separovat se „dá" takto: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$

(používá se tento zápis separace, ale vlevo je „schována" 1VS)

Jak se pak postupuje při řešení rovnice $y' = f(x)g(y)$, $x \in (a,b)$, $y \in (c,d)$ má-li funkce $g(y)$ nulové body?

1) Je-li $g(\bar{y}) = 0$, $\bar{y} \in (c,d)$, pak $y(x) = \bar{y}$ je řešení dané rovnice , $x \in (a,b)$ – – stacionární řešení

2) dále řešíme rovnici v intervalech $(c,\bar{y})$ a $(\bar{y},d)$, kde existuje ke každé počáteční podmínce jediné řešení, ale už nemusí řešení být definováno v celém (a,b) (viz příklad 3.)

3) přes stacionární řešení $y(x) = \bar{y}$ může řešení z intervalu $(c,\bar{y})$ „sklouznout" i do intervalu $(\bar{y},d)$ (nebudeme podrobně řešit, ukážeme na příkladu příště)

Ještě shrnutí – příklad 5 (jednodušší)

$$y' = \frac{x}{1+x^2}(1-y) \quad , \quad x \in R \, , \, y \in R$$

(i) $y(x) = 1, \; x \in R$ – stacionární řešení

(ii) $y(x) \neq 1$ v R, pak můžeme „separovat" a integrovat:

$$\int \frac{dy}{1-y} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx \qquad (a\ 1VS)$$

dostáváme: $\quad -\ln|y-1| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c, \quad c \in R$ (lib.)

(a úpravy) $\quad \ln|y-1| = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - c \quad$ (i $(-c) \in R$, tedy tak $-c = \tilde{c}$, $\tilde{c} \in R$)

$$\ln|y-1| = \ln(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + \ln(e^{\tilde{c}})$$

a pak $\quad |y-1| = e^{\tilde{c}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \; , \; x \in R, \; \tilde{c} \in R \; ;$

odstranění absolutní hodnoty u $|y(x)-1|$:

$y(x) - 1 \neq 0$ v R, $y(x)$ je spojitá funkce v R, tedy

buď a) $y(x)-1 > 0$ v R, a pak $\quad y(x) = 1 + e^{\tilde{c}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \; , x \in R$

nebo b) $y(x)-1 < 0$ v R, pak $\quad y(x) = 1 - e^{\tilde{c}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \; , x \in R$

(tj. $|y(x)-1| = 1 - y(x)$)

(iii) ani u této diferenciální rovnice nebude žádné řešení, tedy by se „slepilo" řešení $y(x) \neq 1$ v nějakém intervalu se „stacionárním" řešením $y(x) = 1$, neboť pro lib. $x = a$ je $\lim\limits_{x \to a} y(x) = y(a) \neq 1 \quad \left(y(a) = 1 + \frac{K}{\sqrt{1+a^2}} \, , K = \pm e^{\tilde{c}} (\neq 0) \right)$ pro řešení z (ii).

Tedy, řešení naší úlohy: $y(x) = 1 + \frac{K}{\sqrt{1+x^2}}$, $K \neq 0$ ($K = e^{\tilde{c}}, K = -e^{\tilde{c}}$), $x \in R \quad$ (z (ii))

a $\quad y(x) = 1, \; x \in R \quad$ (z (i))

Řešení obecné lze pak napsat „jednou" formulí:

$$y_{ob}(x) = 1 + \frac{k}{\sqrt{1+x^2}}, \; k \in R, \; x \in R$$

Řešení počáteční úlohy:

a) $y(0) = 2$: $2 = 1 + k \Rightarrow k = 1$

$$y_{poč}(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \; x \in R$$

b) $y(3) = 1$ – jen stacionární řešení:

$y(x) \equiv 1, \; x \in R$